

# Math 701 Exercices – Arithmétique modulaires et code correcteurs d'erreur

Nicolas Gast

28 octobre 2020

## Exercice 1 Arithmétique

En utilisant l'arithmétique modulaire :

1. Calculer  $5^{121} \bmod 13$ .
2. Est-ce que  $3^{123} + 1$  est divisible par 4 ? Par 7 ?

## Exercice 2 Preuve par 9

1. Sans utiliser de calculette, pourquoi est-ce que  $111111 \times 222222 \neq 24691308644$  ?
2. La preuve par 9 permet-elle de reconnaître toutes les erreurs d'un chiffre ?

## Exercice 3 Relations

1. Les relations suivantes (définies sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers positifs), sont elles des relations d'équivalence ?
  - a)  $a\mathcal{R}_1b$  si  $a$  et  $b$  s'écrivent avec le même nombre de chiffres en base 10.
  - b)  $a\mathcal{R}_2b$  si  $|a - b| \leq 1$ .
2. Les fonctions suivantes (définies sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ) sont-elles des distance ?
  - a)  $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$
  - b)  $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2| & \text{if } y_1 = y_2 \\ |x_1 - x_2| + 1 & \text{if } y_1 \neq y_2 \end{cases}$

## Exercice 4 Mod 97-10

On rappelle le calcul du code mod97-10 d'un nombre  $x$ .

- Soit  $y$  le nombre écrit en ajoutant 00 à la fin de l'écriture de  $x$  en base 10.
  - Calculer le reste  $r$  de la division euclidienne de  $y$  par 97.
  - Transmettre le nombre  $z$  en ajoutant  $98 - r$  à la fin de l'écriture de  $x$  en base 10.
  - Pour vérifier la validité d'un numéro transmis, vérifier que le nombre reçu a un reste de 1 modulo 97.
1. On veut transmettre  $x = 123$ . Calculer son code mod97-10.
  2. On vient de recevoir  $z = 91013$ . Ce code est-il valide ?
  3. On vient de recevoir  $z = 19013$ . Ce code est-il valide ?

### Exercice 5      Pouvoir de correction de mod97-10

Soit  $z$  un numéro à  $n + 2$  chiffres dont les deux derniers chiffres sont les chiffres de contrôle mod97-10.

1. Suite à une étourderie, vous avez changé un chiffre de  $z$  lors de sa recopie. Ce mot est-il un code mod97-10 valide ?
2. Suite à une étourderie, vous avez oublié un chiffre de  $z$ . Ce mot est-il un mot mod97-10 valide ?
3. Suite à une étourderie, vous avez inversé deux chiffres de  $z$  lors de sa recopie. Ce mot est-il un code mod97-10 valide ?
4. Conclure quand au pouvoir de détection des erreurs de mod97-10.

### Exercice 6      mod97-10et distance minimale

On s'intéresse au code correcteur d'erreur mod97-10 pour coder des nombres de 10 chiffres.

1. Quel est le rendement du code ?
2. Quelle est la distance minimale du code mod97-10 ?
3. Combien d'erreur ce code peut-il détecter ? Combien d'erreur ce code peut-il corriger ?
4. Comparer à la borne de Singleton.