

Math 701 Exercices – Arithmétique modulaires et code correcteurs d'erreur

Nicolas Gast

28 octobre 2020

Exercice 1 Arithmétique

En utilisant l'arithmétique modulaire :

1. Calculer $5^{121} \bmod 13$.
2. Est-ce que $3^{123} + 1$ est divisible par 4 ? Par 7 ?

Exercice 2 Preuve par 9

1. Sans utiliser de calculette, pourquoi est-ce que $111111 \times 222222 \neq 24691308644$?
2. La preuve par 9 permet-elle de reconnaître toutes les erreurs d'un chiffre ?

Exercice 3 Relations

1. Les relations suivantes (définies sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers positifs), sont elles des relations d'équivalence ?
 - a) $a\mathcal{R}_1b$ si a et b s'écrivent avec le même nombre de chiffres en base 10.
 - b) $a\mathcal{R}_2b$ si $|a - b| \leq 1$.
2. Les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) sont-elles des distance ?
 - a) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$
 - b) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2| & \text{if } y_1 = y_2 \\ |x_1 - x_2| + 1 & \text{if } y_1 \neq y_2 \end{cases}$

Exercice 4 Mod 97-10

On rappelle le calcul du code `mod97-10` d'un nombre x .

- Soit y le nombre écrit en ajoutant 00 à la fin de l'écriture de x en base 10.
 - Calculer le reste r de la division euclidienne de y par 97.
 - Transmettre le nombre z en ajoutant $98 - r$ à la fin de l'écriture de x en base 10.
 - Pour vérifier la validité d'un numéro transmis, vérifier que le nombre reçu a un reste de 1 modulo 97.
1. On veut transmettre $x = 123$. Calculer son code `mod97-10`.
 2. On vient de recevoir $z = 91013$. Ce code est-il valide ?
 3. On vient de recevoir $z = 19013$. Ce code est-il valide ?

Exercice 5 Pouvoir de correction de mod97-10

Soit z un numéro à $n + 2$ chiffres dont les deux derniers chiffres sont les chiffres de contrôle mod97-10.

1. Suite à une étourderie, vous avez changé un chiffre de z lors de sa recopie. Ce mot est-il un code mod97-10 valide ?
2. Suite à une étourderie, vous avez oublié un chiffre de z . Ce mot est-il un mot mod97-10 valide ?
3. Suite à une étourderie, vous avez inversé deux chiffres de z lors de sa recopie. Ce mot est-il un code mod97-10 valide ?
4. Conclure quand au pouvoir de détection des erreurs de mod97-10.

Exercice 6 mod97-10 et distance minimale

On s'intéresse au code correcteur d'erreur mod97-10 pour coder des nombres de 10 chiffres.

1. Quel est le rendement du code ?
2. Quelle est la distance minimale du code mod97-10 ?
3. Combien d'erreur ce code peut-il détecter ? Combien d'erreur ce code peut-il corriger ?
4. Comparer à la borne de Singleton.