Exam Maths 701

Ex 1

a) $126 = 42 \times 3$ et $4^3 = 64 = -1 \mod 65$

donc : $4^{126} = (-1)^{42} \mod 65$

$= 1$.

b) $4^3 = -1 \mod 65$.

donc : $4 \times 16 = -1 \mod 65$

donc : $4 \cdot (65-16) = 4 \cdot 49 = 1 \mod 65$

donc : 4 est inversible modulo 65 et son inverse est 49

c) $65 = 13 \times 5$

donc 5 n'est pas premier avec 65 et n'est donc pas inversible modulo 65.

65 n'est donc pas un corps.

Ex 2.

1. si $u=(0,0,0,0)$, alors $p(X)=0$ et $C(u)=(0,\dots,0)$

si $u=(1,0,0,0)$, alors $p(X)=1$ et $C(u)=(1,\dots,1)$

si $u=(0,1,0,0)$, alors $p(X)=X_1$ et $C(u)=(0,0,0,0,1,1,1,1)$

2. $C(u)=(u_0,\ u_0+u_3,\ u_0+u_2,\ u_0+u_2+u_3,$

$\qquad u_0+u_1,\ u_0+u_1+u_3,\ u_0+u_1+u_2,\ u_0+u_1+u_2+u_3)$

donc $C(1,0,1,0)=(1,1,0,0,1,1,0,0)$

3. Le code est linéaire car si $C(u)$ et $C(u')$ sont deux mots de code, alors $C(u)+C(u')=C(u+u')$ est un mot de code (car C est linéaire par la Q2)

Une matrice génératrice est

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow C(1,0,0,0) \\ C(0,1,0,0) \\ C(0,0,1,0) \\ C(0,0,0,1) \end{array}$$

5. Un mot de longueur 4 est codé par un mot de longueur 8. Le rendement est donc $r=\frac{1}{2}$

La borne de Singleton est $4 \leq 8(1-r)+1 = 5$

elle n'est donc pas atteinte.

Comme $d_{min}(C) = 4$, le code peut :

* détecter jusqu'à 3 erreurs
* corriger jusqu'à 1 erreur.

Ex 3.

1) a) La probabilité d'avoir un test positif est :

$$P(\text{test positif}) = P(\text{pers positive}) \cdot P(\text{test posi} \mid \text{pers posi}) + P(\text{pers neg}) \cdot P(\text{test neg} \mid \text{pers neg})$$

$$= 0{,}05 \times 0.99 + 0{,}95 \times 0.1$$

$$\simeq 0{,}14$$

b) D'après Bayes :

$$P(\text{pers positif} \mid \text{test positif}) = \frac{P(\text{test positif} \mid \text{pers positif})\, P(\text{pers pos})}{P(\text{test pos.})}$$

$$= \frac{0.99 \cdot 0.05}{0.14}$$

$$\simeq 0.34$$

c) D'après Bayes :

$$P(\text{pers neg} \mid \text{test neg}) = \frac{P(\text{test neg} \mid \text{pers neg})\, P(\text{test neg})}{P(\text{pers neg})}$$

$$= \frac{0.90 \times 0.95}{1 - 0.14}$$

$$\simeq 0.9994$$

2. Notons x la fraction de personnes positives.
Le test d'une personne prise au hasard est positif avec probabilité $0.99x + 0.10(1-x)$

$$= 0.10 + 0.89x.$$

Sachant que 3000/10000 personnes son positives, (en négligeant l'intervalle de confiance) on a :

$$0.30 = 0.10 + 0.89x$$

donc $x = 0.225$

avec un échantillon de 10000 personne, ce chiffre est précis à $\pm 1\%$.

b) $$\mathbb{P}(\text{pers pos} \mid \text{test pos}) = \frac{\mathbb{P}(\text{test pos} \mid \text{pers pos})\,\mathbb{P}(\text{pers pos})}{\mathbb{P}(\text{test pos})}$$

$$= \frac{0.99 \cdot 0.22}{0.30}$$

$$\simeq 0.74.$$